EXERCICE 35

Partie A

$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1 = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 1)$

On pose : $X = -x$

$\lim\limits_{X \to -\infty} (X^2 e^X + Xe^X + e^X - 1) = -1$

2) $\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x}$

$\varphi'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$

le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(-x^2 + x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘		↗	$\frac{3}{e} - 1$	↘	
			0				-1

3) dans $]-\infty, 1[$ φ admet 0 comme minimum local

$\Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 \; ; \; \forall x \in]-\infty; 1[$

$\Rightarrow \varphi(x) > 0 \; ; \; \forall x \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$

d'où l'équation $\varphi(x) = 0$ admet 0 comme unique solution dans $]-\infty; 1[$

* dans $[1, +\infty[$ φ est continue et strictement décroissante $\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-1, \frac{3}{e} - 1]$

Comme $0 \in]-1, \frac{3}{e} - 1]$ d'où il existe un unique réel $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

conclusion

α et 0 sont les seules solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $[1, +\infty[$

* à la calculatrice $\alpha \simeq$ .....

4)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

$g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

1) $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

d'où $A(0,1) \in (\mathcal{C}_f) \cap (\mathcal{C}_g)$

2) a) $f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$

b) $x^2 + x + 1 > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		α		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P.R		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$		$(\mathcal{C}_f)/(\mathcal{C}_g)$		$(\mathcal{C}_g)/(\mathcal{C}_f)$	

3) $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$

$F'(x) = -[2e^{-x} - (2x + 3)e^{-x}]$

$F'(x) = -[-(2x + 1)e^{-x}]$

$F'(x) = f(x)$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

$H(x) = F(x) - \text{Ln}(x^2 + x + 1) + k \; ; \; k \in \mathbb{R}$

$H(0) = 0 \Rightarrow F(0) + k = 0$

$\Rightarrow -3 + k = 0 \Rightarrow k = 3$

D'où

$H(x) = 3 - (2x + 3)e^{-x} - \text{Ln}(x^2 + x + 1)$

EX36

$f(x) = e^{-x} \text{Ln}(1 + e^x)$

Partie A

1) $g(t) = \frac{t}{t + 1} - \text{Ln}(1 + t) \; , \; t \in [0, +\infty[$

$g'(t) = \frac{1}{(t + 1)^2} - \frac{1}{t + 1}$

$g'(t) = \frac{-t}{(t + 1)^2} \leq 0 \; , \; \forall t \in [0, +\infty[$

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	0	↘	$-\infty$

$g(t) \leq 0 \; , \; \forall t \in [0, +\infty[$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn